Q.C.M :

1. $x \to 1+tg^2\, x$
2. $x \to 1-Cos\, x$
3. impaire
4. $x \to \dfrac{1}{2(1-x)^2} - \dfrac{1}{2}$
5. $x \to x \sin x + Cos\, x$

Vrai - Faux :

1. (Vrai)

En effet : cette primitive est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où elle est continue sur $\mathbb{R}$

2. (VRAI)

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \sin x \succ 0 \\ 0 & \sin x = 0 \end{cases}$$

F et dérivable sur $]0,+\infty[$

$$F'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) + x^2(\frac{-1}{x^2} Cos \frac{1}{x})$$

$$F'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - Cos(\frac{1}{x})$$

$F'(x) = f(x)$ *pour* $x \succ 0$

Montrons que F est dérivable à droite en 0 *et*

$F_d'(0) = f(0) = 0$

pour $x \succ 0$

$$\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = x \sin(\frac{1}{x})$$

$$-1 \le \sin(\frac{1}{x}) \le 1 \Rightarrow$$

$$-x \le x \sin(\frac{1}{x}) \le x$$

$$\lim_{x\to 0^+}(-x) = \lim_{x\to 0^+}(x) = 0$$

d'ou

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = 0 = f(0)$$

Conclusion : F est une primitive de f

3. (FAUX)

Contre exemple :

$f(x) = 1 \to F(x) = x$

$g(x) = x \to G(x) = \dfrac{1}{2}x^2$

$(F.G)(x) = \dfrac{1}{2}x^3$

$(F.G)'(x) = \dfrac{3}{2}x^2 \neq (f.g)(x)$

4. (FAUX)

$F(2x) \overset{\text{dérivée}}{\to} 2.f(2x)$

5. (VRAI)

Thérèse du cours :

Il existe une unique primitive de f sur I qui prend une valeur donnée en un point donnée.

EX 1 :

1. $f(x)=-5x^4+2x-3$

$I=\mathbb{R}$

$F(x)=-x^5+x^2-3+k\ ;(k\in\mathbb{R})$

2. $f(x)=(x+2)-\frac{3}{x^2}\ ;\ I=]-\infty,0[$

$f(x)=\frac{1}{2}(x+2)^2+\frac{3}{x}+k\ (k\in\mathbb{R})$

3. $f(x)=\frac{3x}{(3x^2+2)^2}\ ;\ I=\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{3x^2+2}\right)+k\ ;(k\in\mathbb{R})$

4. $f(x)=(-x+3)^6\quad I=\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{-1}{7}(-x+3)^7+k\quad (k\in\mathbb{R})$

5. $f(x)=(x-1).(x^2-2x+7)^4\ I=\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{1}{10}(x^2-2x+7)^5+k$

6. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{-4x+3}}$

$I=\left]-\infty,\frac{3}{4}\right[$

$F(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{-4x+3}+k$

7. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}.Cos(\sqrt{x})\ ;\ I=]0,+\infty[$

$F(x)=2\sin(\sqrt{x})+k$

8. $f(x)=\frac{x^2+1}{(x^3+3x)^5}$

$F(x)=\frac{-1}{12(x^3+3x)^4}+k$

9. $f(x)=\sin(2x+1).Cos^4(2x+1)$

$F(x)=\frac{-1}{10}Cos^5(2x+1)+k$

10. $f(x)=x^2.\sin(x^3+1)$

$F(x)=-\frac{1}{3}Cos(x^3+1)+k$

11. $f(x)=\frac{\sin x}{(1+Cos\ x)^3}$

$F(x)=+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+Cos\ x)^2}\right)+k$

12. $f(x)=\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}-\frac{2}{x^4}$

$F(x)=\frac{-3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{3x^3}+k$

$F(x)=\frac{2-6x-9x^2}{3x^3}+k$

13. $f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}}$

$F(x)=2\sqrt{x^2-x}+k$

14. $f(x)=(1+tg^2x)-1$

$F(x)=tgx-x+k\quad (k\in\mathbb{R})$

Ex 2 :

1. *soit F une primitive de f sur* $[-2,2]$

$F'(x)=f(x$

pour $x\in[-2,-1)\rightarrow f(x)\le 0$

$x\in[-1,0]\rightarrow f(x)\ge 0$

$x\in[0,1]\rightarrow f(x)\le 0$

$x\in[1,2]\rightarrow f(x)\ge 0$

par exemple :

F est croissante sur $[-1,0]$

or graphiquement :

h est decroissante sur $[-1,0]$

d'ou h n'est pas une primitive de f

par suit : g est primitive de f

2. *soit H : une primitive de h*

$H'(x)=h(x);\ \forall x\in[-2,2]$

graphiquement : $h(0)\neq 0$

$\Rightarrow H'(0)\neq 0$

$\Rightarrow(\varsigma_H)$ *n'admet pas une tgte horizentale au point d'assisse* 0

$\Rightarrow(\varsigma_H)\neq(\varsigma_g)$

d'ou f est une primitive de h sur $[-2,2]$

EX 3 :

1. $f(x)=\sqrt{x+1}$

$F(x)=\frac{2}{3}(x+1).\sqrt{x+1}$

2. $f(x)=x\sqrt{1+x^2}$

$F(x)=\frac{1}{3}(1+x^2).\sqrt{1+x^2}$

3. $f(x)=(x-3).\sqrt{x^2-6x}$

$F(x)=\frac{1}{3}(x^2-6x).\sqrt{x^2-6x}$

4. $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$

$f(x)=\frac{(x-1)+2}{\sqrt{x-1}}$

$f(x)=\sqrt{x-1}+\frac{2}{\sqrt{x-1}}$

d'où :

$F(x)=\frac{2}{3}(x-1).\sqrt{x-1}+4\sqrt{x-1}$

$F(x)=(\frac{2}{3}x-\frac{10}{3}).\sqrt{x-1}$

5. $f(x)=(x+\frac{1}{2}).(x^2+x)^7$

$F(x)=\frac{1}{16}(x^2+x)^8$

6. $f(x)=\frac{1}{x^2}.\sqrt{\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}}$

$(\frac{3}{2x}+\frac{1}{2})'=\frac{-3}{2x^2}$

$f(x)=\frac{-2}{3}\left[\frac{-3}{2x^2}\sqrt{\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}}\right]$

$F(x)=\frac{-2}{3}.(\frac{2}{3})(\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}).\sqrt{\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}}$

$F(x)=\frac{-4}{9}(\frac{3+x}{2x})\sqrt{\frac{3+x}{2x}}$

$F(x)=\frac{-2(3+x)}{9x}\sqrt{\frac{3+x}{2x}}$

7. $f(x)=(x+1)^{2009}-(x+1)^{2008}$

$F(x)=\frac{1}{2010}(x+1)^{2010}-\frac{1}{2009}(x+1)^{2009}$

Ex 4 :

1. f(x)=tg x+tg^3 x

f est continue sur I= $[0,\frac{\pi}{2}[$ d'où f admet des primitives sur I

$f(x)=(1+tg^2x).tg\ x$

(de la forme U'.U)

D'où

$F(x)=\frac{1}{2}tg^2x+k$

$F(\frac{\pi}{4})=1\Rightarrow\frac{1}{2}+k=1$

$\Rightarrow k=\frac{1}{2}$

$F(x)=\frac{1}{2}(1+tg^2\ x)$

2. f(x)=Cos(x)-Cos^3 (x)

f est continue sur I= IR

f admet donc des primitives sur I

f (x)=Cos x (1-Cos^2 x)

f (x)=Cos x . sin^2 (x)

d'où

$F(x)=\frac{1}{3}\sin^3 x+k$

$F(\frac{\pi}{2})=-1\Rightarrow\frac{1}{3}+k=-1$

$\Rightarrow k=-\frac{4}{3}$

$F(x)=\frac{1}{3}(-4+\sin^3 x)$

3. f est continue sur I=$\mathbb{R}$ d'où f admet des primitives sur I

$f(x)=\sin x(1-\sin^2 x)$

$f(x)=\sin x.Cos^2 x$

$F(x)=\frac{-1}{3}Cos^3 x+k$

$f(\frac{-\pi}{4})=2\Rightarrow\frac{-1}{3}(\frac{\sqrt{2}}{2})^3+k=2$

$\Rightarrow k=2+\frac{\sqrt{2}}{12}$

$F(x)=\frac{-1}{3}Cos^3 x+2+\frac{\sqrt{2}}{12}$

4. f est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}[$

$f(x)=\frac{1}{Cos^2 x}(1+tg\ x)$

(de la forme U'.U)

$F(x)=\frac{1}{2}(1+tg\ x)^2+k$

$F(\frac{\pi}{4})=0\Rightarrow k=-2$

$F(x)=\frac{1}{2}(1+tg\ x)^2-2$

EX 5 :

1. $f(x)=Cos(x).Cos(3x)$

$g(x)=\sin x.\sin(3x)$

a)

$*(f+g)(x)=Cos\ x.Cos\ 3x+\sin x\sin 3x$

$=Cos(3x-x)$

$=Cos\ 2x$

$\varphi(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ *est une primitive de* $(f+g)$ *sur IR*

$*(f-g)(x)=Cos\ 4x$

$\psi(x)=\frac{1}{4}\sin 4x$

est une primitive de (f-g) sur IR

b).

$(\varphi+\psi)'(x)=\varphi'(x)+\psi'(x)$

$=(f+g)(x)+(f-g)(x)$

$=2f(x)$

$F(x)=\frac{1}{2}(\varphi+\psi)(x)$ est une primitive de f sur IR

$F(x)=\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{8}\sin(4x)+k$ k∈ IR

$(\varphi-\psi)'(x)=(f(x)+g(x))-(f(x)-g(x))$

$=2g(x)$

$G(x)=\frac{1}{2}(\varphi-\psi)(x)$

G est une primitive de g sur IR

$G(x)=\frac{1}{4}\sin(2x)-\frac{1}{8}\sin(4x)+k$ k∈ IR

2.

$h(x)=\sin 4x+Cosx.\sin 4x$

$h(x)=\sin 4x+2Cosx.\sin 2x\ Cos2x$

$=\sin 4x+4\sin x.Cos^2 x\ (Cos\ 2x)$

$=\sin 4x+4\sin x.Cos^2 x\ (2Cos^2 x-1)$

$=\sin 4x+8\sin x.Cos^4 x-4\sin x\ Cos^2 x$

$H(x)=\frac{-1}{4}Cos\ 4x-\frac{8}{5}Cos^5 x+\frac{4}{3}Cos^3+k$

$H(\pi)=0\Rightarrow\frac{8}{5}-\frac{4}{3}+k=0$

$k=\frac{-4}{15}$

$H(x)=\frac{1}{4}Cos\ 4x-\frac{8}{5}Cos^5 x+\frac{4}{3}Cos^3 x-\frac{4}{15}$

EX 6 :

$f(x)=x.\sin x$

1. *f est dérivable sur* $\mathbb{R}$

(*produit de 2 fonction dérivables*)

$f'(x)=\sin x+x\ Cos\ x$

f ' est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f''(x)=Cos\ x+Cos\ x-x\sin x$

$f''(x)=2\ Cos\ x-f(x)$

$\Rightarrow f(x)=2\ Cos\ x-f''(x)$

2. $F(x)=+2\sin x-f'(x)+k$

$F(x)=2\sin-\sin x-x\ Cos\ x+k$

$F(x)=\sin x-x\ Cos\ x+k$

$F(\pi)=0\Rightarrow k=-\pi$

d'où :

$F(x)=\sin x-x\ Cos\ x-\pi$

EX 7 :

$$f(x)=\frac{x+2}{(x+1)^4}$$

$$f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x+1)^3}+\frac{d}{(x+1)^4}$$

1. *a)* $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)^4.f(x)=$

$$\lim_{x\to(-1)^+}(x+2)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1).f(x)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)^4}=\lim_{+\infty}\frac{x^2}{x^4}$$

$$=\lim_{+\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

b) $(x+1)^4.f(x)=$

$$a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$$

$$\lim_{x\to(-1)^+}(x+1)^2 f(x)=d$$

or $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)^4 f(x)=1$ *d'où* $d=1$

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)f(x)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}(a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}+\frac{d}{(x+1)^3})=a$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)f(x)=0$$

d'où $a=0$

$$f(x)=\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+1)^4}$$

2. *a)* $\dfrac{x+2}{(x+1)^4}=\dfrac{b}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{(x+1)^3}+\dfrac{1}{(x+1)^4}$

$$\Rightarrow\frac{x+2}{(x+1)^4}-\frac{1}{(x+1)^4}=\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(x+1)^3}=\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow\frac{1-c}{(x+1)^3}=\frac{b}{(x+1)^2}$$

b) $\dfrac{1-c}{(x+1)^3}=\dfrac{bx+b}{(x+1)^3}$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=0\\b=1-c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=0\\c=1\end{cases}$$

d'où

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+1)^4}$$

3. $F(x)=\dfrac{-1}{2(x+1)^2}-\dfrac{1}{3(x+1)^3}+k$

$$F(0)=2\Rightarrow-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+k=0\Rightarrow k=\frac{5}{6}$$

d'où

$$F(x)=\frac{5}{6}-\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{1}{3(x+1)^3}$$

EX 8 :

$$f(x)=\frac{2x+1}{(x-2)^3}\quad,x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$$

1. $f(x)=\dfrac{2(x-2)+5}{(x-2)^3}$

$$f(x)=\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{5}{(x-2)^3}$$

2. $F(x)=\dfrac{-2}{x-2}-\dfrac{5}{2(x-2)^2}$

$$F(x)=\frac{-4x+3}{2(x-2)^2}$$

EX 9 :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,;x\in\,]-1,1[$$

F est dérivable sur $]-1,1[$

$$\begin{cases}F'(x)=f(x)\\F(0)=0\end{cases}$$

$g(x)=F(\sin x)$

1. *la fonction* : $x \to \sin x$

est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$\sin\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]-1,1\right[$

F est dérivable sur $]-1,1[$ *d'où g est dérivable sur* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$g'(x)=Cos\,x.F'(\sin x)$

$=Cos\,x.f(\sin x)$

$=\frac{Cos\,x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{Cos\,x}{\sqrt{Cos^2 x}}$

$=\frac{Cos\,x}{|Cos\,x|}=1$ *car* $\frac{Cos\,x\succ 0}{x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$

$g'(x)=1\,;\forall x\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

2. $g'(x)=1$

d'où $g(x)=x+k$, $k\in\mathbb{R}$

$g(0)=F(0)=0$

$\Rightarrow 0+k=0$

$\Rightarrow k=0$

d'ou $g(x)=x\ \ x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

3. $F(\frac{\sqrt{2}}{2})=F\left(\sin(\frac{\pi}{4})\right)=g(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}$

$F(\frac{1}{2})=F\left(\sin(\frac{\pi}{6})\right)=g(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}$

$F(-\frac{\sqrt{3}}{2})=F\left(\sin(-\frac{\pi}{3})\right)=g(-\frac{\pi}{3})=-\frac{\pi}{3}$

EX 10 :

$f(x)=\sqrt{1-x^2}\ \ ;x\in[0,1]$

F dérivable sur $[0,1]$

$\begin{cases}F'(x)=f(x)\\F(0)=0\end{cases}$

$g=F(Cos\,x)\,;x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

1. *g est dérivable sur* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

comme était composée de deux fonction dérivable. (*voir ex* 9)

$g'(x)=(-\sin x).F'(Cos\,x)$

$=(-\sin x).f(Cos\,x)$

$=-\sin x\sqrt{1-Cos^2 x}$

$=-\sin x|\sin x|$

$=-\sin^2 x$ *car* $\sin x\geq 0$

2. $g'(x)=-\sin^2 x=-\frac{1}{2}(1-Cos\,2x)$

$g(x)=-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+k$

$g(\frac{\pi}{2})=F(0)=0$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-0)+k=0$

$\Rightarrow k=\frac{\pi}{4}$

d'où

$g(x)=-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{\pi}{4}$

3. $F(1)=F(Cos0)=g(0)=\frac{\pi}{4}$

$F(\frac{1}{\sqrt{2}})=F(Cos\frac{\pi}{4})=g(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$

EX 11 :

1. $f''(x)=0\Rightarrow f'(x)=a\,;a\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)=a\,x+b\qquad (a,b)\in\mathbb{R}^2$

2. $f''(x)=\sin x$

$\Rightarrow f'(x)=-Cos\,x+a;\ \ a\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)=-\sin x+a\,x+b$

$(a,b)\in\mathbb{R}^2$

EX 12 :

1. $f(x)=|x| \quad x\in\mathbb{R}$

a) *f est continue sur* $\mathbb{R}$

b) $\begin{cases} f(x)=x & \sin x\in[0,+\infty[\\ f(x)=-x & \sin x\in\,]-\infty,0[\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(x)=\frac{1}{2}x^2+a & pour\ x\geq 0 \\ F(x)=-\frac{1}{2}x^2+b & pour\ x<0 \end{cases}$$

F est dérivable sur $\mathbb{R} \Rightarrow$ *F continue en* 0

$\Rightarrow a=b$

$$d'où \begin{cases} F(x)=\frac{1}{2}x^2+a & pour\ x\geq 0 \\ F(x)=-\frac{1}{2}x^2+a & pour\ x<0 \end{cases}$$

$F(4)=0 \Rightarrow 8+a=0 \Rightarrow a=-8$

$$\begin{cases} F(x)=\frac{1}{2}x^2-8 & pour\ x\geq 0 \\ F(x)=-\frac{1}{2}x^2-8 & pour\ x<0 \end{cases}$$

2. $g(x)=|x|+|x-1|$

a) *g est continue sur IR*

x	-∞	0	1	+∞
|x|	-x	x	x	
|x-1|	-x+1	-x+1	x-1	
g(x)	-2x+1	1	2x-1	

$$\begin{cases} g(x)=-2x+1 & pour\ x\leq 0 \\ g(x)=1 & pour\ 0<x\leq 1 \\ g(x)=2x-1 & pour\ x>1 \end{cases}$$

d'où

$$G(x)=\begin{cases} -x^2+x+a & pour\ x\leq 0 \\ x+b & pour\ 0<x\leq 1 \\ x^2-x+c & pour\ x>1 \end{cases}$$

G est continueen 0

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} G(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) \Rightarrow a=b$

G continue en $1\Rightarrow$

$1+b=c \Rightarrow c=a+1$

d'où

$$G(x)=\begin{cases} -x^2+x+a & pour\ x\leq 0 \\ x+a & pour\ 0<x\leq 1 \\ x^2-x+a+1 & pour\ x\geq 1 \end{cases}$$

$(a\in\mathbb{R})$

EX 13 :

$f(x)=\sin^3 x+\sin^5 x$

$=\sin x.(1-Cos^2 x)+\sin x.(1-Cos^2 x)^2$

$=\sin x-\sin x\,Cos^2 x+\sin x.(1+Cos^4 x-2Cos^2 x)$

$f(x)=2\sin x-3\sin x.\,Cos^2 x$

$\quad +\sin x.Cos^4 x$

$$F(x)=-2Cos\,x+Cos^3 x-\frac{1}{5}Cos^5 x$$

(on pourra aussi linéariser f(x))

EX 14 :

$$a(t)=1-\frac{1}{(t+1)^2} \quad ; t\in[0,10]$$

1. $\begin{cases} v'(t)=a(t) \\ v(0)=0 \end{cases}$

$$v(t)=t+\frac{1}{t+1}+k$$

$v(0)=0 \Rightarrow 1+k=0 \Rightarrow k=-1$

$$v(t)=t-1+\frac{1}{t+1}$$

2. $v(10)=\frac{100}{11}m/s$

EX 15 :

$f(x)=\sqrt{4-x^2}$; $x\in[-2,2]$

1.*a*) *la fonction* : $x\to 4-x^2$ *est continue et positive sur* $[-2,2]$ *d'où f est continue sur* $[-2,2]$

par suit f admet au moins une primitive sur $[-2,2]$

b)

$\begin{cases}F'(x)=f(x)\\F(0)=0\end{cases}$

$\forall x\in D_F=[-2,2]\,;(-x)\in D_F$

$f(x)=f(-x)\Rightarrow$

$F(x)=-F(-x)+k$

$F(0)=0\Rightarrow k=0$

d'où $F(-x)=-F(x)$

F est impaire.

2. $G(x)=F(2Cos\ x)\,;x\in[0,\pi]$

$\Rightarrow -\pi\le -x\le 0$

$\Rightarrow 0\le \pi-x\le \pi$

$\Rightarrow(\pi-x)\in D_G$

$G(\pi-x)=F(2Cos(\pi-x)$

$=F(-2Cos\ x)$

$=-F(2Cos\ x)$

$=-G(x)$

conclusion : $I(\frac{\pi}{2},0)$ *est un centre de symétrie pour la courbe de f*

b) $G'(x)=-2\sin x.F'(2Cos\ x)$

$=-2\sin x\ f(2Cos\ x)$

$=-2\sin x\sqrt{4(1-Cos^2x)}$

$=-2\sin x\sqrt{4\sin^2x}$

$=-4\sin x.|\sin x|$

$G'(x)=-4\sin^2x$ (*car* $\sin x\ge 0$)

$G'(x)=-2(1-Cos\ 2x)$

d'où $G(x)=-2(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+k$

$G(\frac{\pi}{2})=F(0)=0$

$\Rightarrow -2(\frac{\pi}{2}-0)+k=0$

$\Rightarrow k=\pi$

d'où

$G(x)=-2x+\sin 2x+\pi$

$\forall x\in[0,\pi]$

c) $F(1)=F(2\cos(\frac{\pi}{3}))$

$=G(\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$F(2)=F(2\cos(0))$

$=G(0)=\pi$

$F(\sqrt{2})=F(2Cos\frac{\pi}{4})$

$=G(\frac{\pi}{4})=1+\frac{\pi}{2}$

EX 16 :

$u(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

1. $u'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

$u'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$u'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$

d'où

$\sqrt{1+x^2}=\frac{u(x)}{u'(x)}$

2. $f(x)=\dfrac{1}{u(x).\sqrt{1+x^2}}$

$f(x)=\dfrac{u^1(x)}{u^2(x)}$

$d'où$

$F(x)=\dfrac{-1}{u(x)}$

$F(x)=\dfrac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$g(x)=\dfrac{u^2(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

$g(x)=u^2(x).\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$g(x)=u^2(x)\ \dfrac{u^1(x)}{u(x)}$

$g(x)=u^1(x).u(x)$

$d'où$

$G(x)=\dfrac{1}{2}u^2(x)$

$G(x)=\dfrac{1}{2}(x+\sqrt{1+x^2})^2$

EX 17 :

$f(x)=x.Cos\,x$

$g(x)=x.\sin x$

1. $f'(x)+g(x)=Cosx-x\sin x+x\sin x$

$=Cos\,x$

$d'où\quad g(x)=Cos\,x-f'(x)$

$G(x)=\sin x-(f(x))$

$G(x)=\sin x-x\,Cos\,x$

2. $g'(x)-f(x)=\sin x+x\,Cos\,x-f(x)$

$=\sin x$

$d'où\quad f(x)=g'(x)-\sin x$

$F(x)=g(x)-Cos\,x$

$F(x)=x\sin x-Cos\,x$

EX 18 :

$n \geq 2$

$p_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + n.x^{n-1}$

1. $F_n(x) = x + x^2 + ... + x^n + k \quad k \in \mathbb{R}$

$F_n(0) = 1 \Rightarrow k = 1$

$d'où$

$F_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n$

2. *pour* $x \neq 1$

$$F_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

(somme de (n+1) termes d'une suite géométrique de raison x)

$$F'_n(x) = \frac{-(n+1).x^n.(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$F'_n(x) = \frac{n.x^{n+1} - (n+1).x^n + 1}{(1-x)^2}$$

$$d'où \begin{cases} p_n(x) = \dfrac{n.x^{n+1} - (n+1).x^n + 1}{(1-x)^2} & \text{si } x \neq 1 \\ p_n(1) = \dfrac{(n+1).n}{2} \end{cases}$$

EX 19 : $x \in [0, \pi]$

1. $g(x) = x.\sin x + Cos\ x - 1$

a) $g'(x) = \sin x + x\ Cos\ x - \sin x$

$g'(x) = x.Cos\ x$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
g'(x)	0	+	0	-	
g(x)	0	↗	$\frac{\pi}{2} - 1$	↘	-2

b) *g est continue sur* $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$

$g(\frac{2\pi}{3}).g(\pi) = -2(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2}) < 0$

d'où l'équation g(x)=0 admet une solution $\alpha \in \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$

x	0		α		π
g(x)	0	+	0	-	

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - Cos\ x}{x} & \sin x \in]0, \pi] \\ 0 & \sin x = 0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - Cos\ x}{x} = 0 = f(0)$

f est continue en droite en 0

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - Cos\ x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

f est dérivable à droite en 0 *et* $f'_d(0) = \dfrac{1}{2}$

$b)\quad f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

x	0	α	π
f'(x)	+	0	-
f(x)	0	$f(\alpha)$	$\frac{2}{\pi}$

$c)\quad f(\alpha)=\dfrac{1-Cos\,\alpha}{\alpha}$

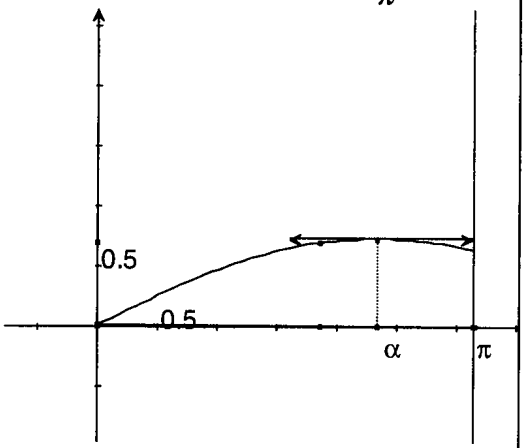
$g(\alpha)=0\Rightarrow \alpha.\sin\alpha+Cos\,\alpha-1=0$

$\Rightarrow Cos\,\alpha=1-\alpha.\sin\alpha$

d'où

$f(\alpha)=\dfrac{\alpha\sin\alpha}{\alpha}=\sin\alpha$

3. $\alpha\simeq 2,34$; $f(\alpha)\simeq 0,72$; $\dfrac{2}{\pi}\simeq 0,61$



4. $k(x)=f(x)$ *pour* $x\in[\alpha,\pi]$

k est continue et strictemen décroissant sur $[\alpha,\pi]\Rightarrow$ *k est une bijéction de* $[\alpha,\pi]$ *sur* $\left[\dfrac{2}{\pi},f(\alpha)\right]=I$

5. $h(x)=g(x)-2\,Cos\,x \quad x\in[0,\pi]$

h est continue sur $[0,\pi]$ *d'où h admet des primitives sur* $[0,\pi]$

$h(x)=x.\sin x-Cos\,x-1$

$H(x)=-x.Cos\,x-x+k$

$H(0)=1\Rightarrow k=1$

d'où $H(x)=1-x-x.Cos\,x$

EX 20 :

$\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

$\begin{cases}G'(x)=\varphi(x)\\ G(0)=0\end{cases}$

1. $G'(-x)=\varphi(-x)=\varphi(x)$

$=G'(x)$

$G'(x)=G'(-x)$

$\Rightarrow G(x)=-G(-x)+k \quad k\in\mathbb{R}$

$G(0)=0\rightarrow k=0$

d'où $G(-x)=-G(x)$

G est impaire

2.*a*) $x\in\mathbb{R}^*$

$\psi(x)=G(x)+G(\dfrac{1}{x})$

ψ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$\psi'(x)=G'(x)-\dfrac{1}{x^2}G'(\dfrac{1}{x})$

$=\varphi(x)-\dfrac{1}{x^2}.\varphi(\dfrac{1}{x})$

$=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{x^2+1}$

$=0$

$\psi'(x)=0$

D'où ψ est constante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ *et* $]0,+\infty[$

$\psi(1) = G(1) + G(1) = 2G(1)$

d'où

$\psi(x) = 2G(1)$; $\forall x \in]0,+\infty[$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = 2G(1)$

b) $u(t) = G(tg\ t)$; $\in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$u'(t) = (1+tg^2 t).G'(tg\ t)$

$= (1+tg^2 t)\ \varphi(tg\ t)$

$= (1+tg^2 t).\frac{1}{1+tg^2 t}$

$u'(t) = 1$

$u(t) = t + k$; $(k \in \mathbb{R})$

$u(0) = G(tg\ 0) = G(0) = 0$

$\Rightarrow k = 0$

$u(t) = t$; $\forall t \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$G(1) = G(tg\ \frac{\pi}{4}) = u(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = 2G(1) = \frac{\pi}{2}$

$G(x) = \psi(x) - G\left(\frac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} G(\frac{1}{x}) = G(0) = 0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \frac{\pi}{2}$

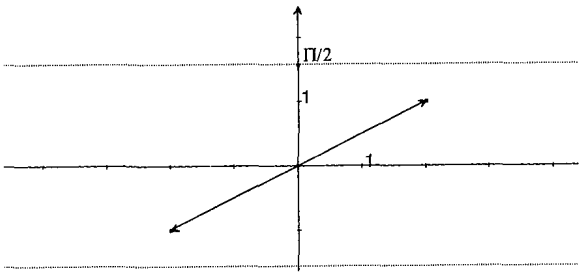
4. $G'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$

x	0	$+\infty$
G'(x)	+	
G(x)	0 ↗	$\frac{\pi}{2}$

G est impaire.

$G'(0) = \frac{1}{2}$

O : centre de symétrie.



EX 21 :

$f(x) = \sqrt{1+Cos\ x}$; $x \in [0,\pi]$

1.*a)* *f Est dérivable sur* $[0,\pi[$

$f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{1+Cos\ x}} \le 0$

f est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ *elle réalise donc une bijection de* $[0,\pi]$ *sur*

$g([0,\pi]) = [g(\pi), g(0)] = \left[0, \sqrt{2}\right]$

b) f est dérivable sur $]0,\pi[$

et $f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{1+Cos\ x}} \neq 0$

d'où f^{-1} *est dérivable sur*

$f(]0,\pi[) = \left]0, \sqrt{2}\right[$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad on\ pose: y=f^{-1}(x)$$

$$f(y)=x$$

$$=\frac{-2\sqrt{1+Cos\ y}}{\sin\ y}$$

$$f(y)=\sqrt{1+Cos\ y}=x$$

$$\Rightarrow 1+Cos\ y=x^2$$

$$\Rightarrow Cos\ y=x^2-1$$

$$\Rightarrow Cos^2 y=(x^2-1)^2$$

$$\Rightarrow -Cos^2 y=-1-x^4+2x^2$$

$$\Rightarrow 1-Cos^2 y=2x^2-x^4$$

$$\Rightarrow \sin^2 y=2x^2-x^4$$

$$\Rightarrow \sin\ y=\sqrt{2x^2-x^4}$$

d'où

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-2}{\sqrt{2-x^2}}$$

$$\forall x\in\left]0,\sqrt{2}\right[$$

2. $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}$

$$x\in\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$$

$$\begin{cases}G'(x)=g(x)\\G(0)=0\end{cases}$$

a) $\varphi(x)=G(x)+G(-x)$

$$\varphi'(x)=G'(x)-G'(-x)$$

$$=g(x)-g(-x)$$

$$=0$$

φ est constante sur $\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$

$$\varphi(0)=0$$

$$\varphi(x)=0,\ \forall x\in\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$$

$$\Rightarrow G(x)+G(-x)=0$$

$$\Rightarrow G(-x)=-G(x)$$

G est impaire.

b) on a :

$$g(x)=-\left(f^{-1}\right)'(x)$$

$$\Rightarrow G(x)=-f^{-1}(x)+k \quad ; \quad k\in\mathbb{R}$$

$$G(0)=-f^{-1}(0)+k$$

$$\Rightarrow 0=-\pi+k$$

$$\Rightarrow k=\pi$$

d'où

$$G(x)=\pi-f^{-1}(x)$$

$$G(1)=\pi-f^{-1}(1)$$

$$G(1)=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

EX 22 :

$$\begin{cases}f(0)=1\\f(1)=0\\f'(x)=\dfrac{-2}{\pi.\sqrt{1-x^2}}\end{cases}$$

1. $f'(x)<0\ ;\ \forall x\in\left]0,1\right[$

f est continue sur $[0,1]$ *et strictement décroissante*

$\Rightarrow$ *f réalise une bijective de* $[0,1]$ *sur*

$$f([0,1])=[f(1),f(0)]=[0,1]$$

2.*a) soit* $g(x)=f(Cos\ x)$

$$g'(x)=-\sin x\,.f'(Cos\ x)$$

$$=\frac{+2\sin x}{\pi\sqrt{1-Cos^2 x}}$$

$$=\frac{+2\sin x}{\pi.|\sin x|}$$

$$=\frac{2}{\pi} \quad car \quad \sin x>0$$

g est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

$g'(x)=\frac{2}{\pi}$

$\Rightarrow g(x)=\frac{2}{\pi}x+k \quad ; \ k\in\mathbb{R}$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0)=1$

$\Rightarrow 1=1+k \Rightarrow k=0$

$d'où \ \ g(x)=\frac{2}{\pi}x$

$\Rightarrow f(Cos\ x)=\frac{2}{\pi}x$

b) $f(Cos\ x)=\frac{2}{\pi}x$

$\Rightarrow f^{-1}(\frac{2}{\pi}x)=Cos\ x$

soit $t=\frac{2}{\pi}x$

$x=\frac{\pi}{2}t$

$d'où \ \ f^{-1}(t)=Cos\ (\frac{\pi}{2}t)$

conclusion :

$f^{-1}(x)=Cos\ (\frac{\pi}{2}x) \ ; \ \forall x\in[0,1]$

3. $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$h(x)=f(Cos\ x)+f(\sin\ x)$

a) comme était composée et somme de fonctions dérivables

h est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$h(x)=f(Cos\ x)+f(Cos(\frac{\pi}{2}-x)$

$=\frac{2}{\pi}x+\frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2}-x)$

$h(x)=1$

$h'(x)=-\sin\ x\ f'(Cos\ x)+Cos\ x\ f'(\sin\ x)$

$h'(x)=\frac{2\sin\ x}{\pi\sqrt{1-Cos^2 x}}-\frac{2\sin\ x}{\pi\sqrt{1-\sin^2 x}}$

$h'(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}=0$

b) *h continue sur* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$h'(x)=0 \ ; \ \forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

d'où h est constante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$h(0)=f(1)+f(0)=1$

$d'où$

$h(x)=1 \ ; \ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

4. $n\in\mathbb{N}^*$

$\varphi_n(x)=Cos(\frac{\pi}{2}x)-x^n$

$x\in[0,1]$

a) $\varphi_n'(x)=\frac{-\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x)-n\ x^{n-1}$

$\varphi_n'(x)\le 0 \ ; \ \forall x\in[0,1]$

φ_n est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$ elle réalise donc une bijection de $[0,1]$ sur

$\varphi_n([0,1])=[-1,1]$ *et comme* $0\in[-1,1]$

alors il existe un uniqueréel

$a_n\in[0,1]\ tq : \varphi_n(a_n)=0$

$\varphi_n(0).\varphi_n(1)<0\Rightarrow a_n\in\ ]0,1[$

b) $n-p>0$ *alors*

$0<x<1 \Rightarrow 0<x^{n-p}<1$

$\Rightarrow 0<(x^{n-p}).x^p<x^p$

$\Rightarrow x^n<x^p$

$\Rightarrow -x^n>-x^p$

$\Rightarrow Cos(\frac{\pi}{2}x)-x^n>Cos(\frac{\pi}{2}x)-x^p$

$\Rightarrow \varphi_n(x)>\varphi_p(x)$

c) a_n *et* $a_{n+1}\in]0,1[$

d'après *b)* $n+1>n$

d'où $\varphi_{n+1}(a_{n+1})>\varphi_n(a_{n+1})$

$\Rightarrow 0>\varphi_n(a_{n+1})$

$\Rightarrow \varphi_n(a_n)>\varphi_n(a_{n+1})$

$\Rightarrow a_n<a_{n+1}$

car φ_n *est strictement décroissante sur* $[0,1]$

d'où (a_n)*est strictement décroissante*

et comme on a $a_n>0$

(a_n) *est décroissante et* min *orée par* 0

elle est donc convergente.